

# ブラインド問題

## Blind Problems

### (2) ブラインド等化

### (2) Blind Equalization

佐藤 洋一

Yoichi Sato

高速デジタル通信において、ブラインド等化は必要不可欠である。移動通信と違って、広帯域・高速デジタル通信に用いるチャンネルはよく整備されており、パルス波形が受ける歪みも雑音も比較的小さい。その代わりに、シンボル当りのビット数を8ビット/シンボルとし、パルスのスペクトルのロールオフ率を限界(10%程度)まで小さくして、超高密度伝送を実現しようとする。このようなシステムに第1部で解説したブラインド系列推定を採用しようすると、そのスケールはたちまち非現実的な大きさになってしまう。そこで、実際のシステムでは、一つのFIR(Finite Impulse Response)等化器によってチャンネルの逆システムを実現する方式が採られている。

#### 1. ブラインド等化問題

第1部のブラインド同定で扱った問題は以下のものであった。受信信号

$$y_k = h_0 a_k + h_1 a_{k-1} + h_2 a_{k-2}$$

(1)

は雑音を含まないとする。連続する4時刻をとりだし、すべての送信シンボル候補系列 $(\hat{a}_{k-2}, \hat{a}_{k-1}, \hat{a}_k, \hat{a}_{k+1}, \hat{a}_{k+2}, \hat{a}_{k+3}, \dots)$ について、連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_k, \hat{a}_{k-1}, \hat{a}_{k-2} \\ \hat{a}_{k+1}, \hat{a}_k, \hat{a}_{k-1} \\ \hat{a}_{k+2}, \hat{a}_{k+1}, \hat{a}_k \\ \hat{a}_{k+3}, \hat{a}_{k+2}, \hat{a}_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h}_0 \\ \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ y_{k+3} \end{pmatrix} \quad (2)$$

が解 $(\hat{h}_0, \hat{h}_1, \hat{h}_2)$ をもつかどうかをチェックする。もし解をもてばその候補を残し、解をもたなければ捨てるという処理を時々刻々続ける。こうして生き残った候補を矛盾のない遷移にしたがって繋げてゆき、中断することなく最終的に繋がった長い候補系列の鎖を送信シンボル系列として判定する。この判定のオンライン・アルゴリズムとしてブラインド・ピタビ・アルゴリズムを解説した。式(2)の代わりに、

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{k-d} \\ \hat{a}_{k-d+1} \\ \hat{a}_{k-d+2} \\ \hat{a}_{k-d+3} \\ \hat{a}_{k-d+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, y_{k-3}, y_{k-4} \\ y_{k+1}, y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, y_{k-3} \\ y_{k+2}, y_{k+1}, y_k, y_{k-1}, y_{k-2} \\ y_{k+3}, y_{k+2}, y_{k+1}, y_k, y_{k-1} \\ y_{k+4}, y_{k+3}, y_{k+2}, y_{k+1}, y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

のような連立一次方程式を考えると、等化によるブラインド系列推定になる。このオンライン・アルゴリズムは第1部に準じて導くことができる。ただし、以下のことに注意を払う必要がある。

(1) 逆システム(等化器)が有界な範囲で存在しないことがある。

(2) チャンネル応答 $(h_0, h_1, h_2)$ が短かくても、その逆システム(等化器)の応答は長くなる。一般的にいて、等化器の応答を長

くとる必要があるので、連立一次方程式(3)は大きくなる。

(3) 遅延量  $d$  による自由度が発生する。これはブラインド系列推定で議論したように、難しい問題となる。

以上は、第1部から直接的に導き出せるブラインド等化の一方法である。この方法が応用できる対象は、送信シンボルが2値ないし4値程度で、等化器の長さが短い場合に限定される。理由は、ビタビ・アルゴリズムのスケールが  $S^N$  ( $S$  = 多値数、 $N$  = 等化器長) に比例して大きくなるからである。たとえば、CATV や加入者線高速デジタル通信 (ADSL: Asymmetric Digital Subscriber Line) などでは、256個の複素数をシンボルとし、等化器長も40ないし60を考慮する必要がある。このようなケースでは、上のような方法は実現性がない。

ブラインド等化の歴史はブラインド同定(系列推定)よりも古い。1975年の筆者の論文(文献1)がその発端であるといわれているが、遡る1952年の Bussgang, J.J の論文(文献2)にその萌芽(非線形自己相関の研究)がみられる。ブラインド等化の原理は、受信信号のみから直接的にチャンネルの逆システム(等化器)を推定しようというものである(図1参照)。

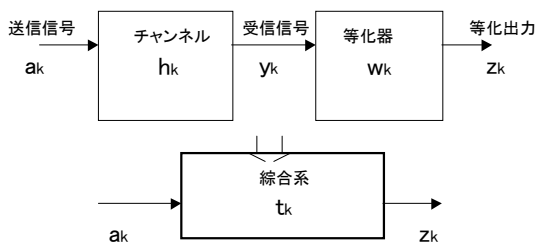


図1. 等化モデル

受信信号と送信信号は線形システムで関係付けられている。送信信号がある周波数成分をもたなければ、受信信号にはその成分が

含まれないので、逆システムを全周波数にわたって正確に作ることができない。したがってまず、送信信号はすべての周波数成分をもっていることが等化可能の必要条件である。

更に、すべての周波数成分を含むランダム信号であっても、単に電力スペクトルが与えられるだけならば(有色であろうと白色であろうと)、チャンネルと送信信号の間にまだ位相特性の配分に関する自由度が残っており、ブラインド等化は厳密にいて不可能である。この配分の自由度を解消するには、送信信号にもっと厳しい条件を与えなければならない。それが確率的な意味での「独立系列」という条件である。「独立系列」の定義は

$$P(\dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots) = \dots P(a_{k-1})P(a_k)P(a_{k+1}) \dots \quad (4)$$

である。

この定義は  $a_k$  の確率的生起が前後のシンボル  $\dots, a_{k-2}, a_{k-1}$  および  $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$  の確率的生起によって影響を受けないことを主張している。

等化目標は、総合系の応答が

$$t_i = \begin{cases} 1, & (i = 0) \\ 0, & (i \neq 0) \end{cases} \quad (5)$$

を満たすことである。たとえば、等化出力  $z_k$  が独立系列になるように等化器を調整するというブラインド戦略が正当であるためには、まず送信系列  $a_k$  が独立であるという条件が必要になる。実際のデジタル通信では、多値送信シンボル系列はスクランブルを受けており、独立かつ同じ分布に従う (I.I.D.: Independent and Identically Distributed) ことを前提とすることができ

る。I.I.D.は単なる独立系列にさらに同一分布に従うという条件を加えたものであり、従来の大部分の論文はI.I.D.を前提としている。しかし、たとえば分布が奇数時刻と偶数時刻で異なる場合や、ランダムに異なる分布が選択されるといった独立系列も考えられる。このような送信シンボル系列に従来のブラインド等化は成功するだろうかという疑問も生ずる。一口に「独立」といっても、いろいろなバリエーションが考えられる。

## 2. ブラインド等化が簡単にできるケース

受信信号  $y_k$  に対して最適線形予測を適用してみる。予測値を

$$\hat{y}_k = p_1 y_{k-1} + p_2 y_{k-2} + \dots + p_N y_{k-N} \quad (6)$$

で計算し、予測誤差  $e_k = \hat{y}_k - y_k$  の自乗平均

$$MSE = E[e_k^2] \quad (7)$$

を最小にするパラメータ  $p_1, p_2, \dots, p_N$  は、Yule-Walker の方程式

$$\mathbf{p} = \quad (8)$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} \phi_0 \phi_1 \dots \phi_{N-1} \\ \phi_1 \phi_0 \dots \phi_{N-2} \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \phi_{N-2} \dots \phi_0 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}$$

で与えられる。ただし、 $\phi_i = E[y_k y_{k+i}]$ 。相関行列は対称行列なので固有値はすべて実であり、また  $y_k$  が周期信号でないかぎりすべて正である(文献3, p.88)。以上のことから、Yule-Walkerの解は一意に決まる。Yule-Walkerの形は、解が受信信号の2次統計量(自己相関)だけから求まることを示しており、実際のオンライン・アルゴリズムは

$$p_i = p_i - \epsilon y_{k-i} e_k \quad i = 1, 2, \dots, N$$

(9)

で与えられ、ブラインド推定の形をしている。特別な場合として、受信信号がすでに白色であるとすると、最適解は

$$p_1 = 0, p_2 = 0, \dots, p_N = 0 \quad (10)$$

であり、予測値を常にゼロにすることが最適であり、 $e_k = y_k$ である。すなわち、送信信号の電力スペクトルとチャンネルの自乗振幅特性の積で受信信号の白色性(平坦電力スペクトル)が得られているのであるから、両者がともに歪んでいても、ともに平坦であっても、なにもしないことが最適となる。したがって予測にはチャンネルを等化するということはない。一般に受信信号が有色でもこのことは同じである。

しかし、送信信号とチャンネルに対して次のような仮定をおくと、ブラインド予測 = ブラインド等化がいえる。

(1) 受信信号は独立(単に無相関ではだめ)

(2) チャンネルは最小位相推移

その理由は以下のようである。因果的線形システム

$$H(z^{-1}) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots, \quad (11)$$

が、安定な因果的逆システム

$$H(z^{-1})^{-1} = 1 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots \quad (12)$$

をもつとき、最小位相推移であるという。

最小位相推移の典型的なものは自己回帰モデル(Auto-Regressive Model: AR Model)である。入力  $a_k$  と出力  $y_k$  の関係は

$$y_k = (\alpha_1 y_{k-1} + \alpha_2 y_{k-2} + \dots) + a_k \quad (13)$$

で与えられ、現在時刻の出力が自らの過去の一次結合と現在時刻の不確定要因( $a_k$ )の和で表される。伝達関数およびその逆は

$$H(z^{-1}) = \frac{1}{1 - (\alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots)} \quad (14)$$

$$H(z^{-1})^{-1} = 1 - (\alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots) \quad (15)$$

であり、ともに安定で、因果的である(図2)。ただし、図2の左右の回路は同じであり  $\alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots$  を表す。

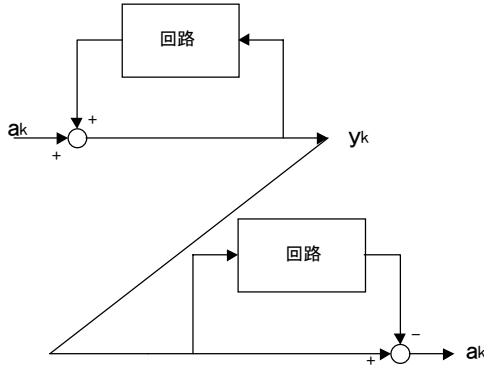


図2. ARモデルとその逆

もし、チャンネルが式(14)ならば、式(15)が等化器である。そして、図2の回路は予測器を意味し、右辺全体は予測誤差を出力するシステム(以下予測システムと呼ぶ)を意味する。Yule-Walkerの方程式の解が、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  に等しくなるためには、不確定要因  $a_k$  が独立であることが必要である(文献3参照)。単に無相関では、送信信号に含まれる位相特性がチャンネルの位相特性に含まれた形で決まってしまう。以上を要約すれば、

**チャンネルが最小位相推移ならば、送信信号をI.I.D.として、最適予測によってブラインド等化が可能である。**

### 3. ブラインド等化が簡単でないケース

まず、直感的理解のため、下の記号を用いる。

$\bar{H}_i$  : 最小位相推移の伝達関数(右矢印は時間の進む方向で因果的(Causal)であることをあらわし、添字 i は単に関数の識別番号を表す)

$\bar{H}_j$  : 逆最小位相推移の伝達関数(左矢印

は時間を遡る方向に因果的(Anti-causal)であることを表す。とくに  $j=i$  のとき、 $\bar{H}_i$  は  $\bar{H}_i$  を時間原点で折り返したものを表す。したがって、 $\bar{H}_i = \bar{H}_i^*$  (\*は複素共役)。

十分な長さで打ち切った因果的な非最小位相推移伝達関数

$$H = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + \dots + h_L z^{-L} \quad (16)$$

を因数分解し、ゼロ点が単位円の外の因数と中の因数にグループ分けする。この結果を

$$H = \bar{H}_1 \bar{H}_2 \quad (17)$$

のように表す。 $\bar{H}_1$  を単位円内の  $L_1$  次多項式、 $\bar{H}_2$  を単位円外の  $L_2$  次多項式とする(ただし、 $L = L_1 + L_2$ )。Hの逆は、形式的に

$$H^{-1} = \bar{H}_1^{-1} \bar{H}_2^{-1} \quad (18)$$

で表される。ここで、 $\bar{H}_2^{-1}$  は安定であるが、 $\bar{H}_1^{-1}$  は完全に(どの因数も)不安定である。完全に不安定ならば、時間を遡る方向で安定である。したがって、逆システム(18)は因果的には安定でないが、時間原点を  $L_2$  だけ遅延させると、このまわりで両時間方向に安定になる。 $L_1$  は伝達関数(16)に固有であり、一意的に決まる。図3にその概念図を示す。

非最小位相推移チャンネルを通過した受信信号に対して前記の最適予測システムを求めると次のようになる。

$$1 - (p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots) = (\bar{H}_1 \bar{H}_2)^{-1} \quad (19)$$

したがって、チャンネルと予測システムからなる総合システムは

$$H(\bar{H}_1 \bar{H}_2)^{-1} = \bar{H}_1 \bar{H}_1^{-1} \quad (20)$$

となる。この絶対値は1であるから、予測誤差は白色になる。式(20)から、予測に

よって最小位相推移部分  $\bar{H}_2$  についてはブラインド等化されることがわかる。この結果から、いったん予測誤差信号を記録し、それに対して逆時間方向の最適予測システム

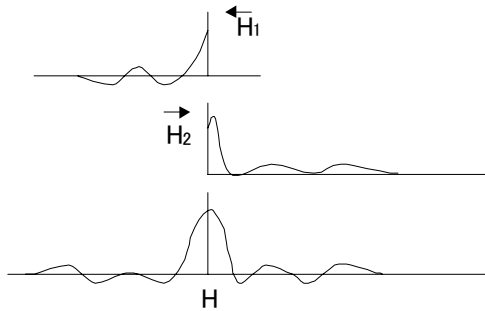


図3. 因果的安定と反因果的安定の積で伝達関数が表される  
(L1時刻遅延したところに時間原点を移動してある)

を適用すればブラインド等化が成功するのではないかという期待が生ずる。しかし、このことを式(20)に対して確認してみると、反因果的な最適予測システムは  $\bar{H}_1 \bar{H}_1^{-1}$  のようになり、チャンネルと因果的予測と反因果的予測からなる総合系の伝達関数は結局  $\bar{H}_1 \bar{H}_1^{-1}$  となり、なんの進展も見出せない。さらに、因果的予測と反因果的予測を同時に実行する両側予測では  $1/|H|$  となり、総合系は  $H/|H|$  であるから等化は成功しない。以上を要約すれば、

2次統計量だけを用いてどのように工夫しても非最小位相推移に対するブラインド等化の戦略は得られない。

#### 4. ブラインド等化へのアプローチ

等化目標は

$$HW = 1, \quad (W \text{ は等化器}) \quad (21)$$

である。両辺に  $H^*$  をかければ

$$|H|^2 W = H^* \quad (22)$$

である。前者は Zero-Forcing 等化、後者は Mean Square 等化の意味をもっている。いずれも、 $W$  を求めるにはチャンネルそのもの、すなわち  $H$  が具体的に必要である。これがブラインド等化のジレンマである。チャンネルが最小位相推移のときは例外であった。その理由は、式(22)右辺の  $H^*$  が時間原点を除く半時間領域でゼロであり、その半時間領域で半分の自由度の因果的予測システムが式(22)を満たせばよいから

$$|H|^2 \vec{W} = 0, \quad (\text{半時間領域}) \quad (23)$$

すなわち、

$$\vec{W} = 1 - z^{-1} \vec{P} \quad (24)$$

(ただし、 $\vec{P} = p_1 + p_2 z^{-1} + p_3 z^{-2} + \dots$ )

とにおいて、Yule-Walker の方程式

$$|H|^2 \vec{P} = z|H|^2, \quad (\text{半時間領域}) \quad (25)$$

が得られる。

上のストーリーからすれば、非最小位相推移のブラインド等化は絶望的に思われる。

しかし、我々は送信信号が独立あるいは I.I.D. であることから次のような手がかりをもつことができる。

(1) 入力も出力も独立ならば、その線形システムは必然的に透明(遅延とゲインの任意性を許して入力をそのまま通過させる)ではないだろうか？

(2) I.I.D. の入力信号が従う確率分布は、線形システムを通過すると必ず分散する。とすれば、出力の分布が入力の分布に等しければ、その線形システムは透明ではないだろうか？

以下に、これらの期待が真であることを証明し、次章以降でこれらを目標にしたオンライン・ブラインド等化について述べる。

**定理 1 . 正規分布以外の I.I.D. 信号  $a_k$  を入力とする線形システムの出力**

$$z_k = \dots + t_{-2}a_{k+2} + t_{-1}a_{k+1} + t_0a_k + t_1a_{k-1} + t_2a_{k-2} + \dots \quad (26)$$

**が独立系列ならば、そのシステムは透明でなければならない。**

<証明> 隣接する信号  $z_k$  と  $z_{k+1}$  が互いに独立、すなわち

$$P(z_k, z_{k+1}) = P(z_k)P(z_{k+1}) \quad (27)$$

を満たすためには、非ゼロの  $t_i$  の少なくとも両隣(合計 2 つ)はゼロでなければならない。加えて、1 つおきの信号  $z_k$  と  $z_{k+2}$  が互いに独立ならば、非ゼロの  $t_i$  の少なくとも両側 2 つ(合計 4 つ)はゼロでなくてはならない。このことから演繹して、

$$P(z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+N}) = P(z_k)P(z_{k+1})P(z_{k+2}) \dots P(z_{k+N}) \quad (28)$$

が成り立つためには、非ゼロの  $t_i$  の少なくとも両側  $N$  個(合計  $2N$  個)はゼロでなくてはならない。応答が  $i = \pm\infty$  でゼロに減衰することを仮定できれば、 $N$  を十分大きく選んで、式(28)から透明性が得られる。 $a_k$  が正規分布に従うときは、すべての  $t_i$  が非ゼロであっても式(27)あるいは式(28)の分解が可能であり、透明性は保証されない。

この定理に基づくブラインド等化は Zero-forcing 等化の意味をもつ。有限長の等化器  $w_n (n = -N \dots N)$  による Zero-forcing 強制等化アルゴリズムは

$$\begin{pmatrix} w_N \\ - \\ - \\ w_0 \\ - \\ - \\ w_{-N} \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} w_N \\ - \\ - \\ w_0 \\ - \\ - \\ w_{-N} \end{pmatrix}_k - \varepsilon \begin{pmatrix} a_{k-N} \\ - \\ - \\ a_k \\ - \\ - \\ a_{k+N} \end{pmatrix} (z_k - a_k) \quad (29)$$

である。等化器の期待値は、

$$\overline{w}_{k+1} = \overline{w}_k - \varepsilon E[a_k^2](H\overline{w}_k - \mathbf{u}) \quad (30)$$

にしたがって修正される。行列  $H$  はチャネル応答  $h_i$  を要素とする Toeplitz 行列であり、 $\mathbf{u}$  は中央が 1 で他はゼロである単位ベクトルである。収束が成功すれば、総合応答のピークの両側  $N$  個がゼロになり、定理 1 の結果を満す。Zero-forcing は符号間干渉を MiniMax の意味で最小化する。アルゴリズムの収束に関しては拙書(文献 3)にあるように、時間原点( $a_k$  と  $z_k$  の時間関係)に依存し、また大域的収束には注意を要する。

**定理 2 . 正規分布以外の I.I.D. 信号を入力とする線形システムの出力が入力と同じ分布に従うならば、そのシステムは透明でなければならない。**

<証明> 入力に従う確率密度関数  $P(x)$  の積分変換

$$\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{\xi x} dx \quad (31)$$

を  $P(x)$  の母関数(probability generating function)という。出力に従う確率密度関数を  $P_z(x)$ 、その母関数を  $\Phi_z(\xi)$  で表すと次の関係を導くことができる。

$$\Phi_z(\xi) = \prod_{i=-\infty}^{\infty} \Phi(t_i \xi) \quad (32)$$

$\Phi(\xi)$  と  $\Phi_z(\xi)$  のキユムラント展開(母関数の対数のベキ展開)は、

$$\log \Phi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa_n / n!) \xi^n \quad (33)$$

$$\log \Phi_z(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa_n / n!) (\sum_{i=-\infty}^{\infty} t_i^n) \xi^n \quad (34)$$

となる。ここで  $\kappa_n$  は入力の  $n$  次キュムラントである。ちなみに、 $P(x)$  を対称分布とすれば奇数次のキュムラントはすべてゼロであり、モーメント

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) x^n dx \quad (35)$$

との間に以下のような関係がある。

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \mu_2 \\ \kappa_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2 \\ \kappa_6 &= \mu_6 - 15\mu_4\mu_2 + 30\mu_2^3 \\ \kappa_8 &= \mu_8 - 28\mu_6\mu_2 - 35\mu_4^2 + 420\mu_4\mu_2^2 - 630\mu_2^4 \end{aligned} \quad (36)$$

もし、すべてのキュムラントが一致すれば、二つは同じ分布である。式(33)と式(34)のキュムラントがすべて一致するためには、すべての  $n$  について、

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} t_i^n = 1 \quad (37)$$

でなければならない。このことは、一つの  $t_i$  が孤立して 1 であり、他はすべてゼロであることを意味する。ただし、入力が正規分布に従うときは、応答のいかんにかかわらず出力も正規分布になるから上の議論はあてはまらない。

## 5. ブラインド等化アルゴリズム

定理 1 と 2 は、それぞれオンライン・ブラインド等化の戦略を示唆している。以下、送信シンボルは  $E[a_k] = 0$  かつ対称分布に従うとする。

まず、定理 1 から考えてみよう。独立性を厳密に保証するには式(28)のような分解を実現しなければならないが、これを忠実に実現するには信号の多次元ヒストグラムを扱う必要がある。これは非現実的なので、非線形相関を導入してみる。たとえば、 $E[\text{sign}(z_{k+n})z_k] = 0$  は、おおざっぱに言って

$z_k$  の期待値が  $z_{k+n}$  によって左右されないことを意味している。一般に、この非線形相関を具体的に表すことは難しいが、デジタル通信で仮定できるように、 $a_k$  が一様分布に従うとすれば、

$$\begin{aligned} E[\text{sign}(z_{k+n})z_k] \\ = \{(1-D)/6\}t_{-n} + \{1/(3t_0)\}\phi_n \end{aligned} \quad (38)$$

$$\left( \text{ただし、} D = \sum_{i \neq 0} t_i^2 / t_0^2, \phi_i = \sum t_i t_{i+n} \right)$$

のようになる。正確な Zero-forcing 等化 ( $t_n = 0, n = -N, \dots, N, n \neq 0$ ) は、右辺第 2 項を消去して、次のように得られる。

$$\begin{aligned} w_n &= w_n - \varepsilon(\text{sign}(z_{k+n})z_k - z_{k+n}z_k/3), n \neq 0 \\ w_0 &= w_0 - \varepsilon(\text{sign}(z_k)z_k - 0.5) \end{aligned} \quad (39)$$

また、一様分布以外も対象とするならば、

$$\begin{aligned} E[z_{k+n}^3 z_k] = \\ (A_4 - 3A_2^2) \sum t_i^3 t_{i-n} + A_2 \sum t_i^2 \sum t_i t_{i+n} \end{aligned} \quad (40)$$

を用いるとよい。なお、記号、 $A_n = E[a_k^n]$  あるいは  $A_n^m = E[a_k^n]^m$  などは以下で頻繁に用いられる。右辺第 1 項に関しては、 $t_i^3, (i \neq 0)$  が解の近くで十分小さいので、

$$\sum t_i^3 \sum t_{i-n} \approx t_0^3 t_{-n} \quad (41)$$

のように近似でき、Zero-forcing の意味をもつ。ただし、 $a_k$  が正規分布ならば、式(40)の右辺に含まれる  $A_4 - 3A_2^2$  は恒等的にゼロであり、等化不能である。

次に、定理 2 によるアルゴリズムを紹介する。従来のブラインド等化アルゴリズムのほとんどは定理 2 に基づいている。従来よくみられる、直感的に理解しやすいアプローチは、「入力の分布が線形システムによって分散し、より正規分布に近づくということだから、等化出力  $z_k$  の分布を正規分布から遠ざければよい。あるいは、エントロピー

$$E = \int P_z(x) \log P_z(x) dx \quad (42)$$

を最小化すればよい(文献4,5)。  
 というものである。具体的には、尖り度や4次キュムラントやKallback-Leibler Information Criteria といった統計的指標が用いられている。ただし、このような指標は期待値のべきを含んでいたり、 $z_k$  の分布の形を推定する必要があったりするので、そのままオンライン・アルゴリズムで実現することは難しい。加えて、直感的な理解と引き換えに、等化器の大域的収束などの性質を調べることが困難な場合が多い。通信では、アルゴリズムに高い信頼性(大域的収束や正確な最適解)が要求されるので、もっと具体的な関数が用いられる。以下に、そのような関数の設計方針を説明する。

まずは、等化器の長さを無限とする。有限長のときは、その関数が本当に最適解に収束するかどうか、時間原点をどこにとればよいかなど、実際的な疑問が生ずる。これらについては後回しにする。

等化出力  $z_k$  の非線形関数の期待値

$$C = E[f(z_k)] \quad (43)$$

は、 $z_k$  の高次モーメントを複雑に含んでいる。これを最小または最大にすることによって分散した分布が元にもどするならば、次のブラインド等化アルゴリズムを実行すればよい。

$$w_n = w_n - \epsilon y_{k-n} \partial f(z_k) / \partial w_n, n = -\infty \dots \infty \quad (44)$$

最初に提案された関数は、

$$f_1(x) = (x - \gamma \text{sign}(x))^2 = x^2 - 2\gamma|x| + \gamma^2 \quad (45)$$

(ただし、 $\gamma = E[a_k^2] / (2E[|a_k|])$ )

である。送信シンボルが一様分布に従うとき、等化器長を有限とした場合にも最適解を

与え、その収束は大域的に保証されることが Y. Sato によって示された(文献1)。しばらくして、A. Benveniste はこれを一般化し、

$$f_2(x) = \int_0^x \phi(t) dt - \gamma|x| \quad (46)$$

(ただし

$\phi(t)$ : 偶関数  $\phi(t)' \geq 0, (t \geq 0)$ )

が正規分布以外の任意の分布に対して最適解へ大域収束することを示した(文献6)。ただし、無限長等化器を前提としている。ほとんど同時に、2次元正規分布以外の複素信号にも適用可能な

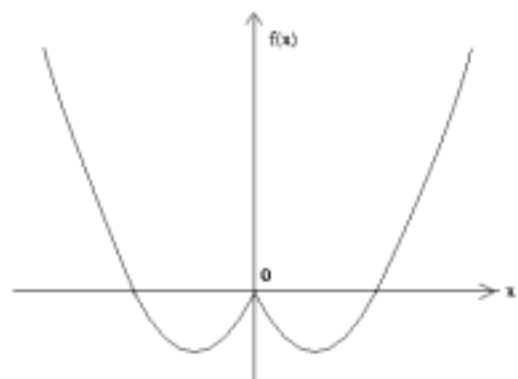
$$f_3(x) = (x^Q - \rho)^2, \rho = A_{2Q} / A_Q \quad (47)$$

$$f_4(x) = x^{2Q} - \sigma x^2, \sigma = QA_{2Q} / A_2 \quad (48)$$

などが提案された。これらも無限長等化器を前提としている(文献7,8)。

$f_1(x)$  と  $f_2(x)$  は信号の絶対値の期待値を含んでおり、その扱いが難しい。一方、 $f_3(x)$  と  $f_4(x)$  は偶数べきのみからなっているので、解析的扱いが可能である。これらは、 $Q=2$  として、複素信号を扱う QAM (Quadrature Amplitude Modulation、直交振幅変調) に広く実用されている。

直感的にいうと、関数  $f(x)$  は  $x=0$  で極大をもち、その両側で一对の極小をもつ滑らかな下に凸な曲線であればよい。 $f_1(x), f_2(x)$  は図4aのような形を、 $f_3(x), f_4(x)$  は図4bのような形をしている。図4の上に  $z_k$  の分布を置いてみると、分布の全体的な広がりがどこかで釣り合い、同時に裾の部分が圧縮





されるというイメージが湧く。

図 4a :  $f_1(x), f_2(x)$  の曲線

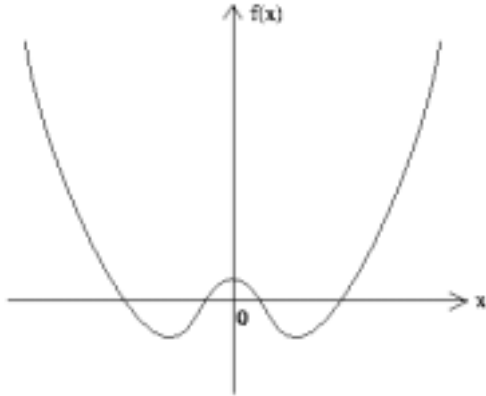


図 4b :  $f_3(x), f_4(x)$  の曲線

任意分布に対する大域収束は、 $f_3(x), f_4(x)$

について以下のように厳密に検討できる。  
キュムラントとモーメントの関係式 (36) を  
用いて、

$$E[z_k^2] = A_2 \sum t_i^2 \quad (49)$$

$$E[z_k^4] = A_4 \sum t_i^4 + 3A_2^2 (\sum t_i^2)^2 - 3A_2^2 \sum t_i^4 \quad (50)$$

$$E[z_k^6] = (A_6 + 15A_4A_2 - 30A_2^3) \sum t_i^6 - 15A_4A_2 \sum t_i^4 \sum t_i^2 + 30A_2^3 (\sum t_i^2)^3 \quad (51)$$

$$E[z_k^8] = (A_8 + 28A_6A_2 + 35A_4^2 + 420A_4A_2^2 + 630A_2^4) \quad (52)$$

$$- 28A_6A_2 \sum t_i^6 \sum t_i^2 - 35A_4^2 (\sum t_i^4)^2 + 420A_4A_2^2 \sum t_i^4 (\sum t_i^2)^2 - 630A_2^4 (\sum t_i^2)^4$$

などの公式が得られる。  $Q=2$  のとき、 $f_3(x)$  と  $f_4(x)$  はともに、

$$E[f(z_k)] = (A_4 - 3A_2^2) \sum t_i^4 + 3A_2^2 (\sum t_i^2)^2 - 2A_4 \sum t_i^2 \quad (53)$$

のようになるが、すべての  $t_i$  について 1 回

微分と 2 回微分を詳細に検討すると以下の  
ように大域収束がいえる。

**関数  $f_3(x)$  および  $f_4(x)$  を用いたブライ  
ンド等化は大域収束する。 すなわち、停  
留点のうち、極値は任意の一つの  $t_i$  が 1  
であり、他はすべて 0 となる点であり、  
鞍点は複数任意個の  $t_i$  が同じ絶対値をも  
ち、他はすべて 0 となる点である。 正  
規分布では、 $A_4 - 3A_2^2 = 0$  であることから、**

**$\sum t_i^2 = 1$  を満たす超球面上がすべて極値  
になってしまう。**

## 6 . 応用上の諸問題

### 6 . 1 高速収束

非ブラインド等化と同様に、修正項に受  
信信号の逆相関行列の推定をかける再帰最  
小自乗法は収束を著しく速める。 たとえば、  
 $f_4(x)$  については、

$$\begin{aligned} k_k' &= Q_{k-1} y_k \\ s_k' &= y_k^T k_k' \\ Q_k &= Q_{k-1} - k_k' k_k'^T / (1 + s_k') \\ k_k &= k_k' / (1 + s_k') \\ w_{k+1} &= w_k - k_k (z_k^3 - \sigma z_k) \end{aligned} \quad (54)$$

を繰り返せばよい。 ブラインド等化理論か  
らみた正当性は文献 8,9 を参照。

### 6 . 2 有限長等化器の最適解

等化器長が短い場合、 $Min.E[f(z_k)]$  がどの  
ような意味で最適化されるかを具体的に示  
すことは難しい。 また、どのような目標を  
採用すればよいかも、一義的に決めるわけに  
ゆかない。 しかし、あえてもっとも一般  
的な目標を挙げるとすれば、それは非ブライ  
ンド等化によって実現される最小平均自乗誤  
差  $E[(z_k - a_k)^2]$  の解であろう。 ブライ  
ンドおよび非ブラインドの平衡状態では、それぞ

れ

$$E[z_k f'(z_k)] = 0 \quad (55)$$

$$E[z_k(z_k - a_k)] = 0 \quad (56)$$

が成立している。  $z_k \approx a_k$  を仮定し、一次近似

$$f'(z_k) = f'(a_k) + f''(a_k)(z_k - a_k) \quad (57)$$

を用いて、両式が等価であるための条件を導くと

$$E[a_k^2 f''(a_k)] = E[a_k^2] E[f''(a_k)] \quad (58)$$

が得られる。  $f_1(z_k)$  は条件 (58) を満たしているが、  $f_3(z_k), f_4(z_k)$  などは満たしていない。実際、  $(z_k - a_k)^2$  を縦軸として、短い等化器でシミュレーションしてみると、かなりの差が認められる。条件 (58) を満たすような関数を新たに設計することもできる (文献 10)。

### 6.3 時間原点 (遅延時間) の固定

しばしば、等化器の遅延時間をできるだけ短くしたいという要求がある。極端には、因果的な (遅延なしの) 最適等化が要求される。しかし、ブラインド等化アルゴリズムは遅延時間を固定するという力をなにも含んでいない。全タップをリセットした状態からブラインド・アルゴリズムを開始すると、遅延時間がどのように定まるかはまったく不明である。また、中央タップを決めて開始すれば、その近傍の遅延時間で収束するが、等化誤差が大きい状態では、それが最適解であるという保証はなにもない。このように、一つの関数だけで遅延時間を固定して最適解を実現することは不可能である。この問題は図5のように予測システムを前置することにより簡単に解決できる。予測システムは因果的であり、その出力 (予測誤差) は白色である。この予測誤差に対して十分長いブラインド等化をバックグラウンドで実

行する。この長い等化器を指定された遅延個所で打ち切ったものに予測誤差を入力すると、遅延固定の最適等化結果が得られる (文献 11)。

### 6.4 分布が変化する場合

$a_k$  は独立であるが、異なる分布が周期的またはランダムに切り替わる場合、従来のブラインド等化が収束するか否かは興味深い問題である。理論的な扱いは大変難しいと予想される。実際、いくつかの例をシミュレーションしてみると、収束の成功に関して予測しがたい結果を得る。

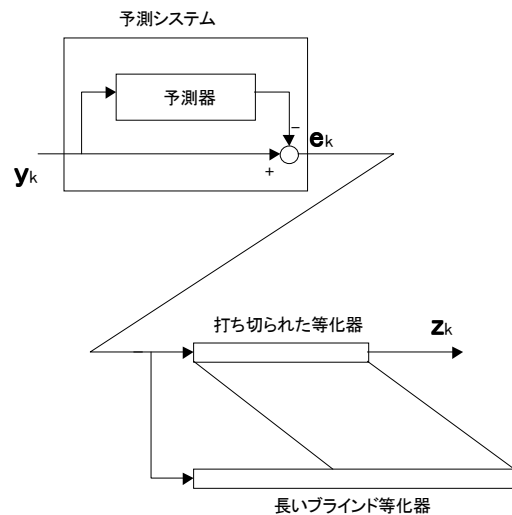


図5. 遅延固定ブラインド等化システム

## 7. むすび

2回にわたってブラインド問題の解説を行った。それぞれは、応用として以下のケースを意図していた。

### 第1部: ブラインド系列推定

< 移動通信 >

- ・ bit/symbol が小さい
- ・ パルス長が短い

### 第2部: ブラインド等化

< 広帯域・高速通信 >

- ・ bit/symbol が大きい(連続分布まで含める)
- ・ パルス長が長い

これらを補完するケースとして、

(1) 連続分布に対する同定によるブラインド系列推定

(2) bit/symbol が小さいときの等化によるブラインド系列推定(冒頭で触れた)

が考えられる。いずれも、まだ研究されていないケースである。前者は、ビタビ・アルゴリズムのサイズが無限大になり、そのままでは実現が不可能である。しかし、連続分布に従う送信シンボルの量子化をもちこみ、この量子化を時間とともに細かくする(状態数が指数関数的に増加する)ようなブラインド・ビタビ・アルゴリズムを考えることはできる。

最近、CDMA 移動通信などで重要さを増している多ユーザのブラインド分離受信では、いわゆるレプリカを作るビタビ・アルゴリズムは演算規模の膨大さからあまり顧みられていない。判定帰還型を含む多次元ブラインド等化の応用が多く提案されている。しかし、理論的にいえば、レプリカ方式は最適な受信方法であり、演算規模の大きさを克服する実際的な研究がもっとなされるべきではないかと思われる。

#### 参考文献

1. Y.Sato, "A Method of Self-recovering Equalization for Multi-level Amplitude Modulation Systems" IEEE Trans, Vol.COM-23, No.6, pp.679-682, 1975
2. J.J.Busgang, "Cross-Correlation Functions of Amplitude Distorted Gaussian Signals" M.I.T. Research Lab. of Electronics Tech. Rept., No.216, Mar., 1952
3. 佐藤 洋一「線形等化理論」丸善出版, 1990
4. R.A.Wiggins, "Minimum Entropy

Deconvolution", Geoexploration, Vol.16, pp21-35, 1978

5. E.Donoho, "On Minimum Entropy Deconvolution", Applied Time Series Analysis Press, pp.560-608, 1981

6. A.Benveniste, M.Coursat and G.Ruget, "Robust Identification of a Non-minimum Phase system", IEEE, Trans., Vol.AC-25, No.3, pp.385-399, 1980

7. D.N.Godard, "Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-dimensional Data Communication Systems" IEEE. Trans., Vol.COM-28, No.11, pp.1867-1875, 1980

8. 小田弘良, 佐藤洋一「ブラインド等化の高速化について」システム制御情報学会論文誌, Vol.6, No.7, pp.305-318, 1993

9. Ofir.Shalvi and Ehud Weinstein, "Super-Exponential Methods for Blind Deconvolution", IEEE.Trans., Vol.39, No.2, pp.504-519, 1993

10. 佐藤洋一,「ブラインド等化とブラインド系列推定」システム制御情報学会, 解説, Vol.40, No.9, pp.401-409, 1996

11. A.Kanaoka and Y.Sato "Blind Equalization with Arbitrarily Fixed Time Delay", Proceedings of The 30<sup>th</sup> ISICIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Application., pp.129-133, 1998